

向量积

Cross Product

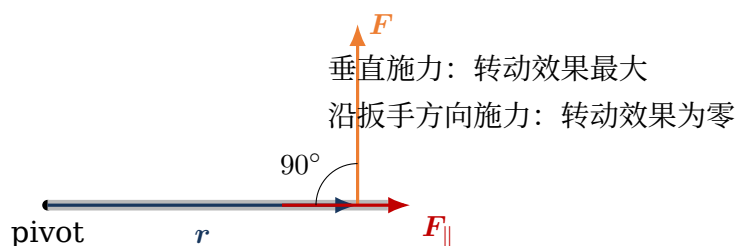
40 分钟课堂讲义

Learning Objectives 本节课结束时，学生应能够：

- 解释为什么需要向量积；
- 判断 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向；
- 计算三维向量的向量积；
- 使用 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$ ；
- 用向量积求面积和法向量；
- 理解力矩 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 。

1. Lesson Starter: 为什么需要向量积? (0-5 min)

情境：用扳手拧螺母。 设从转轴到施力点的位置向量为 $\mathbf{r}$ ，施加的力为 $\mathbf{F}$ 。转动效果不只取决于力的大小，还取决于力的方向。



如果 θ 是 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{F}$ 的夹角，那么转动效果的大小应与

$$rF \sin \theta$$

有关。但我们还需要表达**旋转方向**。因此需要一种运算，它的结果既有大小又有方向：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Cross Product / 向量积 (叉积)

2. Definition and Geometric Meaning (5-10 min)

对于三维向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，向量积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是一个新的向量。

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

其方向同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}.$$

因此， $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张成平面的一个**法向量**。

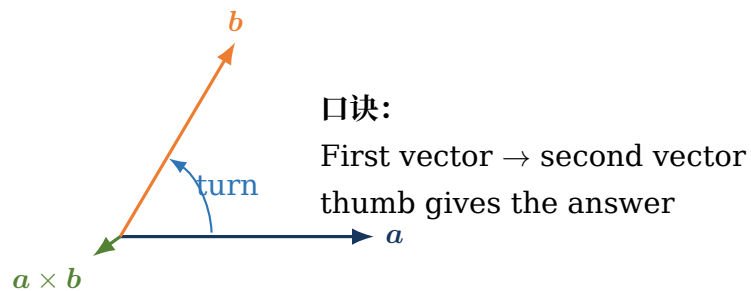
核心直觉：

Cross product = “面积大小” + “垂直方向” + “旋转方向” .

3. Right-Hand Rule (10-14 min)

计算 $a \times b$ 的方向时使用右手定则：

1. 右手四指先沿第一个向量 a ；
2. 四指从 a 弯向第二个向量 b ；
3. 大拇指所指方向就是 $a \times b$ 。



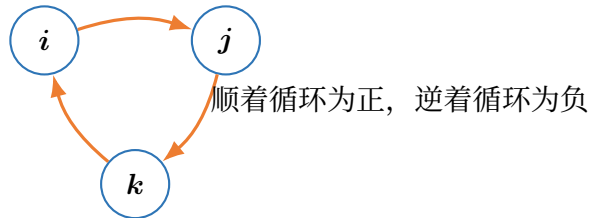
交换顺序，方向反转：

$$a \times b = -(b \times a).$$

向量积不满足交换律。

4. Unit Vector Results (14-17 min)

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



$$\boxed{\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}}, \quad \boxed{\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}}, \quad \boxed{\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}}.$$

反向则取负，例如

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}.$$

同时

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

5. Calculating a Cross Product (17-23 min)

设

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

也可记为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

注意中间的 $\mathbf{j}$ 项展开时有负号。

Example 1: Direct Calculation

设

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(4 - 3) - \mathbf{j}(2 - 12) + \mathbf{k}(1 - 8) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Fast Check: Is the Answer Perpendicular? (23-25 min)

若计算正确，则应满足

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

对 Example 1:

$$(1, 2, 3) \cdot (1, 10, -7) = 1 + 20 - 21 = 0,$$

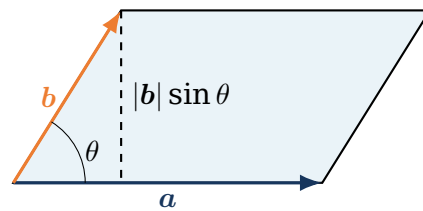
$$(4, 1, 2) \cdot (1, 10, -7) = 4 + 10 - 14 = 0.$$

因此所得向量确实同时垂直于原来的两个向量。

7. Geometric Meaning: Area (25-29 min)

以 $|a|$ 为底，由 a 与 b 构成的平行四边形高度为 $|b| \sin \theta$ 。因此

$$A = |a| |b| \sin \theta = |a \times b|.$$



$$A_{\text{parallelogram}} = |a \times b|$$

$$A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} |a \times b|$$

Example 2: Area of a Triangle

给定

$$A(1, 0, 0), \quad B(3, 1, 0), \quad C(2, 2, 1).$$

求三角形 ABC 的面积。

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{14}.$$

故

$$\text{Area of } \triangle ABC = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

8. Application: Torque / 力矩 (29-34 min)

力矩向量定义为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad |\boldsymbol{\tau}| = rF \sin \theta.$$

- $\theta = 0^\circ$: $\tau = 0$, 沿扳手方向推几乎不产生转动;
- $\theta = 90^\circ$: $\tau = rF$, 转动效果最大。

Example 3: Torque

一大小为 20 N 的力作用在距离转轴 0.30 m 处，力与位置向量夹角为 60° 。求力矩大小。

$$|\boldsymbol{\tau}| = 0.30(20) \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \approx \boxed{5.20 \text{ N m}}.$$

9. Important Special Cases (34-36 min)

情况	结论	原因
$a \parallel b$	$a \times b = 0$	$\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$
$a \perp b$	$ a \times b = a b $	$\sin 90^\circ = 1$
交换顺序	$b \times a = -(a \times b)$	方向反转

10. Cross Product vs Dot Product (36-38 min)

Dot Product	Cross Product
$a \cdot b$	$a \times b$
结果是 scalar	结果是 vector
$ a b \cos \theta$	$ a b \sin \theta$
衡量同向/投影程度	衡量垂直/面积/旋转效果
垂直时为 0	平行时为 0
满足交换律	交换顺序变号

Dot $\rightarrow \cos \theta \rightarrow$ alignment

Cross $\rightarrow \sin \theta \rightarrow$ area / perpendicular direction

11. Student Practice (38-40 min)

Question 1: Calculation

设

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。

Question 2: Geometric Interpretation

设

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

计算 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 并解释几何意义。

Question 3: Area

向量

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

构成三角形的两条边。求三角形面积。

12. Answers

Q1.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Q2.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}$, 所以两个向量平行。

Q3.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{46}.$$

因此

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

13. Exit Summary

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is a vector

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \text{area of the parallelogram}$$

The cross product combines magnitude, perpendicularity, area and rotation into one vector.