

最速降线科普文

廖曙光 老师

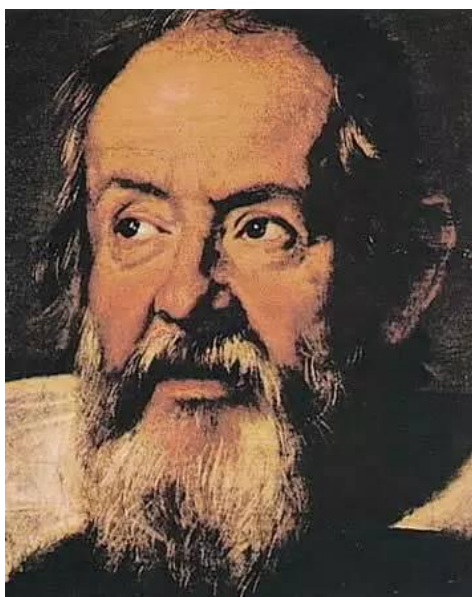
第一部分 问题描述：

物理语言描述：“一个质点在重力作用下，从一个给定点 A 到不在它垂直下方的另一点 B，如果不计摩擦力，问沿着什么曲线滑下所需时间最短。”

数学语言描述：在一垂直坐标平面内，出发点作为原点，第四象限内 (a,b) 作为终点，设计一条“运行轨道”，要求运行时间最短。

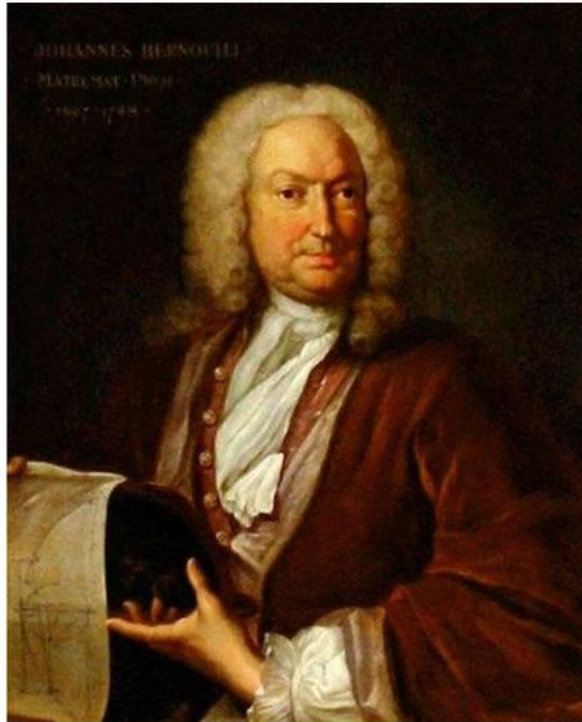
第二部分 问题背后的故事：

这个问题是意大利科学家伽利略在 1630 年提出的。



他认为，这段曲线是段圆弧。很快，他的观点被否定了。

瑞士数学家约翰·伯努利在 1696 年 6 月在莱布尼兹的杂志《教师学报》上再次提出这个最速降线的问题（problem of brachistochrone）。



他向全欧洲数学家征求解答。人们当然会首先想到连接 AB 的直线。但伯努利对试图采用这一过于简单化的方法提出了警告：

“不要草率地做出判断，虽然直线 AB 的确是连接 A、B 两点的最短线路，但它却不是所用时间最短的路线。而曲线 AMB 则是几何学家所熟知的一条曲线。如果在年底之前（指 1696 年）还没有其他人能够发现这一曲线，我将公布这条曲线。”

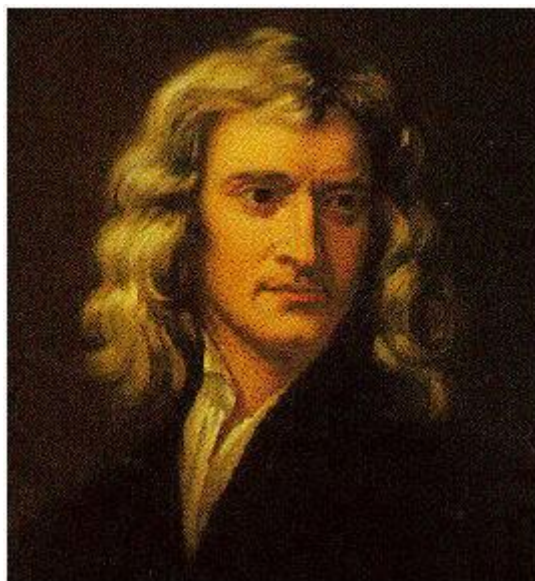
约翰·伯努利原定于 1697 年 1 月 1 日公布答案。但是到最后期限时，只收到他的老师莱布尼兹寄来的一份答案。



莱布尼茨请求伯努利延长最后期限到复活节，以便让欧洲科学家们有更多时间来充分解决此道难题。伯努利同意了他的请求，延长了期限。然后，为确保不会使人误解这道难题，约翰又重复了一遍：

“在连接已知两点的无限多的曲线中。选择一条曲线，如果用一根细管或细槽代替这条曲线，把一个小球放入细管或细槽中，放手让它滚动，那么，小球将以最短的时间从一点滚向另一点。”

伯努利在“战书”中还特别暗示了他的挑战对象，他写道：“……很少有人能解出我们的独特的问题，即使那些自称通过特殊方法……不仅深入探究了几何学的秘密、而且还以一种非凡的方式拓展了几何学领域的人，这些人自以为他们的伟大定理无人知晓，其实早已有人将它们发表过了”。这简直就是赤裸裸的指向伟大的英国科学家伊萨克·牛顿了！伯努利提到的“定理”指的是流数术，而牛顿曾宣称自己早在莱布尼兹 1684 年发表微积分论文前就已经发现了这一理论。莱布尼兹正是伯努利的老师，自己师父和牛顿争夺微积分的发明权，弟子当仁不让要维护师门尊严。约翰·伯努利亲自把降速问题抄了一份，装进信封寄往英国。



此时牛顿已不是当年的牛顿了，他自己也承认，他的头脑已经不如二十年前那么机敏了，而且还整天忙于造币局的事务。关于此事我们可以看看牛顿的外甥女凯萨琳记述的内容：

“1697 年的一天，收到伯努利寄来的问题时，伊萨克牛顿爵士正在造币局里忙着改铸新币的工作，很晚才精疲力竭地回到家里。但是，直到解出此道难题，他才上床休息，这时已经是凌晨 4 点钟。”即使是在晚年，而且忙了一天的本职工作，牛顿还是用几个小时就解决了许多欧洲数学家都无法解出的难题！这位伟大天才的功力可见一斑。牛顿感到了自己作为一代宗师的荣誉和名望都受到了挑战，对手正等着看他笑话，因此牛顿当仁不让，仅用几个小时就解决了此题。牛顿被激怒了，据说他曾说过：“在数学问题上，我不喜欢被外国人戏弄”。1697 年复活节的截止期限，伯努利总共收到了 5 份答案，他自己的和其老师莱布尼兹的，第三份是他的哥哥雅可布·伯努利的。



这肯定使得约翰·伯努利很不爽，因为他们兄弟两个从来都是谁也不服谁，互相比较劲。洛毕达是第四个。



最后一份答案的信封上盖有英国的邮戳，并且是匿名的，但答案完全正确！显然这封信来自一位绝顶天才，非伊萨克·牛顿莫属。据说，伯努利半是恼怒，半是敬畏地放下这封匿名答案，说到：“我从他的利爪认出了这头狮子。”

除洛毕达的答案外，其他人的解答都在 1697 年 5 月 5 月的《博学通报》公布。答案就是一段旋轮线也叫摆线。帕斯卡和惠更斯以前就研究过这一重要的曲线，可是他们谁也没有想到这还是一条最速降线。因为钟表摆锤作一次完全摆动所用的时间相等，所以摆线又称等时曲线。

数学历史上的挑战古已有之，但这一次最速降线的挑战可谓数学史上最激动人心的一次挑战。参与讨论的都是赫赫有名的大数学家。牛顿、莱布尼兹各自独立创立了微积分；以伯努利兄弟为代表的伯努利家族是数学世家。罗毕达年轻时就显露了数学天赋，十五岁就解出了帕斯卡的摆线难题。

这次挑战各人的解法各有千秋，约翰伯努利的解法最漂亮，类比了费马原理，将物理和几何融合到一起，用光学的思想一下子就得出结论。雅各布·伯努利的方法最一般化，体现了变分思想。牛顿、莱布尼兹和罗毕达都是用微积分方法，但是步骤并不相同。

此问题直接导致了另一位旷世天才的登场，大数学家莱昂哈德·欧拉（约翰·伯努利的学生）也在 1726 年开始发表有关的论著，在 1744 年最先给了这类问题的普遍解法，并产生了变分法这一新的数学分支。



第三部分 推荐解法:

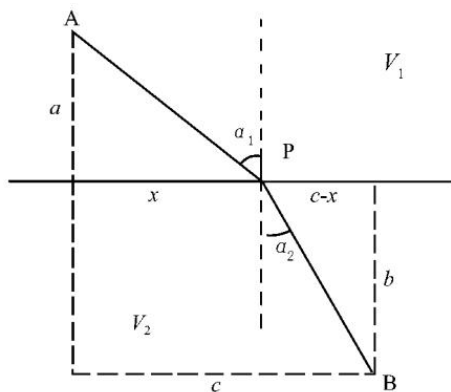


图2 光线的折射

这里限于篇幅, 只对约翰巧妙的物理解法做简要介绍。如图2所示, 光线以速度 V_1 从 A 点到达 P 点, 进入另一媒质以速度 V_2 从 P 点到达 B 点。按图中记号, 经过整个路程所用时间为

$$T = \sqrt{a^2 + x^2} / V_1 + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} / V_2. \quad (1)$$

若该路程使时间达到最小, 即 $dT/dx = 0$, 得到

$$x / V_1 \sqrt{a^2 + x^2} = (c-x) / V_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \quad (2)$$

或

$$\sin \alpha_1 / V_1 = \sin \alpha_2 / V_2. \quad (3)$$

这就是斯涅耳(W. Snell, 1591~1626) 1621 年通过实验发现的折射定律, 也是费马原理的例证之一。若光线通过多层媒质, 在交界处都满足斯涅耳定律:

$$\frac{\sin \alpha_1}{V_1} = \frac{\sin \alpha_2}{V_2} = \frac{\sin \alpha_3}{V_3} = \frac{\sin \alpha_4}{V_4} = \dots \quad (4)$$

当各层变得越来越薄而层数越来越多, 极限情况下, 速度连续变化, 光线也连续弯曲(图3), 如太阳光进入大气层, 则满足:

$$\sin \alpha / V = \text{常数}. \quad (5)$$

可以设想, 小球从 A 下降到 B 时间最短的路径, 同样应该满足公式(5)。

利用能量守恒, 小球在不同高度的速度为

$$V = \sqrt{2gy}, \quad (6)$$

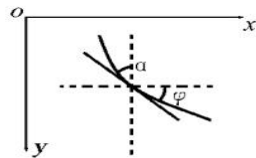


图3 连续变化媒质中的光线

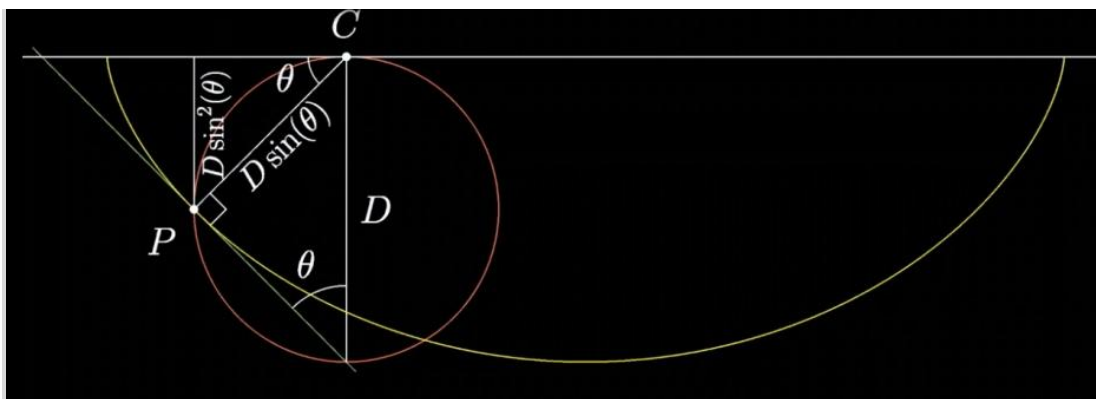
最速路径要求: $\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{y}} = \text{常数}$

而摆线满足上述条件！参考下面的图形。

$$y = D \times \sin^2(\theta) = D \times \sin^2(\alpha); \quad (\theta \text{ 即 } \alpha)$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{D} \times \sin(\theta);$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{D}} = \text{常数}$$



（Mark Levi，可以直观的“常数”和 θ ！）

参数方程：

$$x(t) = Rt - R \sin(t)$$

$$y(t) = -R + R \cos(t)$$

$$\text{其中： } t = 2\theta$$

回到开篇部分的 数学语言描述：在一垂直坐标平面内，出发点作为原点，第四象限内 (a,b) 作为终点，设计一条“运行轨道”，要求运行时间最短。

$$a = Rt - R \sin(t)$$

$$b = -R + R \cos(t)$$

将 R 视为 y

$$y_1 = \frac{a}{t - \sin(t)}$$

$$y_2 = \frac{b}{-1 + \cos(t)}$$

利用几何画板或其他工具可以求得 R。

第四部分 总结：

最速降线问题，含金量极高——三角函数，坐标系，数学史，微积分，动量定理，光学原理，泛函分析.....值得进一步深挖。